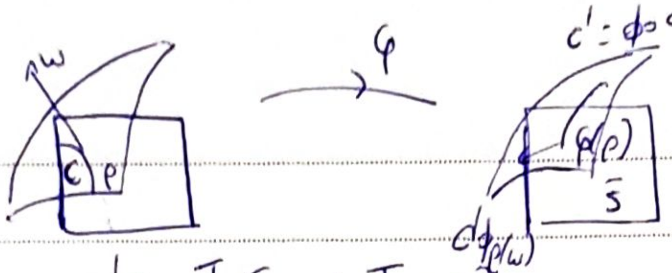


15/11/2018

$d\varphi_p : T_pS \to T_{\varphi(p)}\tilde{S}$

$c(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$, $c(0)=p$ $c'(0)=w$

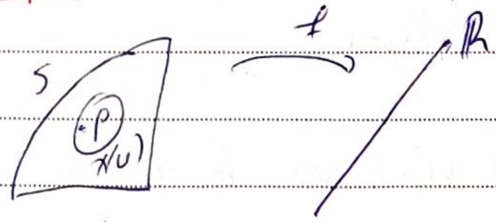
$d\varphi_p(w) = \tilde{c}'(0)$, $\tilde{c} = \phi \circ c$

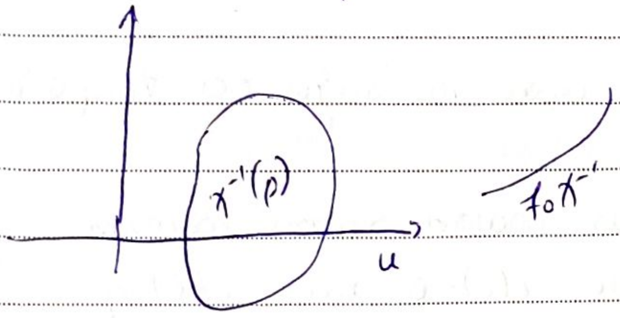
$\phi : S_1 \to S_2$ $\psi = S_2 \to S_3$ διαφ. τότε η $\psi \circ \varphi : S_1 \to S_3$ είναι διαφ.

και ισχύει $d(\psi \circ \varphi)_p = d\psi_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p$

Διαφορίσιμες συναρτήσεις επί επιφανειών

Ορισμός: Μια συνεχής συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ καλείται διαφορίσιμη στο σημείο $p \in S$ αν για σύστημα συν/νων $X : U \to S$ με $p \in X(U)$ η $f \circ X : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφ. αν $X^{-1}(p)$





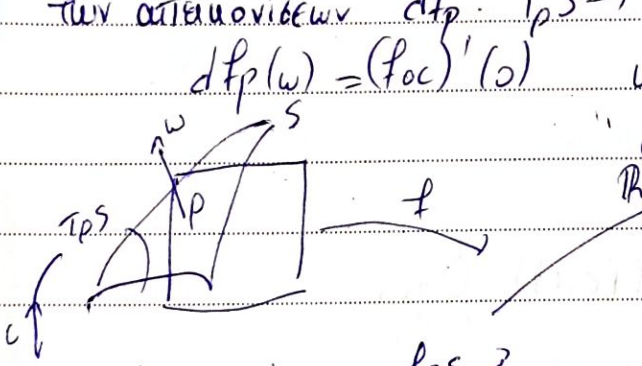
Η f καλείται διαφορίσιμη $\Leftrightarrow$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε $p \in S$.

Διαφορικών διαφ. συναρτήσεων επί κανονικών επιφανειών

Ορισμός: Καλούμε διαφορικό διαφ. συνάρτησης $f : S \to \mathbb{R}$ στο σημείο $p \in S$ των απεικονίσεων $df_p : T_pS \to \mathbb{R} = T_{f(p)}\mathbb{R}$

$df_p(w) = (f \circ c)'(0)$ $\quad w \in T_pS$, $c : (-\varepsilon,\varepsilon) \to S$

" $c(0)=p$, $c'(0)=w$



Παρατήρηση: Το διαφορικό df_p είναι καλά ορισμένο και γραμμική απεικόνιση.

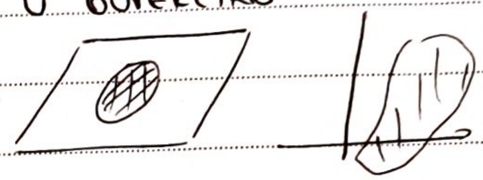
Πρόταση

Έστω $f: S \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και S κανονική συνεκτική επιφάνεια. Αν ισχύει $df_p = 0$ $\forall p \in S$ τότε η f είναι σταθερή.

Απόδειξη

Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων $X: U \to S$ με U συνεκτικό

$df_p(X_u) = 0 = df_p(X_v)$ $\forall p = X(q)$, $q \in U$



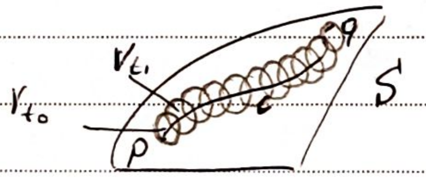
$df_p(X_u) = (f \circ X)_u$, $df_p(X_v) = (f \circ X)_v$

Έχω $f \circ X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $(f \circ X)_u = 0 = (f \circ X)_u$

Άρα, $f \circ X$ είναι σταθερή $\Rightarrow f / X(U) =$ σταθερή

Απέδειξα ότι $\forall p \in S$ υπάρχει περιοχή $V = V(p)$ στον S τέτοια ώστε $f|_V =$ σταθερό.

Για να δείξω ότι η f είναι σταθερή αρκεί να δείξω ότι $\forall p, q \in S$ $f(p) = f(q)$



Λόγω συνεκτικότητας υπάρχει συνεχής καμπύλη $c: [0,1] \to S$ με $c(0) = p$ και $c(1) = q$. Για κάθε $t \in [0,1]$ υπάρχει περιοχή V_t του σημείου $c(t)$ ώστε $f|_{V_t} =$ σταθ. $= a_t$

Προφανώς ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} &c([0,1]) \subseteq \bigcup_{t \in [0,1]} V_t \\ &c([0,1]) \text{ συμπαγές} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{Heine-Borel}}$$

$\exists\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ ώστε $c([0,1]) \subset \bigcup_{i=0}^{k} V_{t_i}$

$V_{t_0} \cap V_{t_1} \neq \emptyset \Rightarrow a_{t_0} = a_{t_1}$

Διαφορίσιμες απεικονίσεις επί κανονικών επιφανειών

$\phi : S \to \mathbb{R}^3$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ $\phi_i : S \to \mathbb{R}$

- Η ϕ καλείται διαφορίσιμη $\Leftrightarrow$ κάθε ϕ_i είναι διαφορίσιμη

- Καλούμε διαφορικό της ϕ στο $p \in S$ την γραμμική απεικόνιση
  $d\phi_p : T_p S \to \mathbb{R}^3 \equiv T_{\phi(p)}\mathbb{R}^3$

Κανονικές Παραμετρικές Επιφάνειες

Ορισμός: • Καλούμε παραμετρική επιφάνεια κάθε λεία απεικόνιση
$X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in U$

- Η X καλείται κανονική $\Leftrightarrow$ dX_v είναι 1-1 $\forall v \in U$
  $\Leftrightarrow$ $X_u \times X_v(q) \neq 0$ $\forall q \in U$.

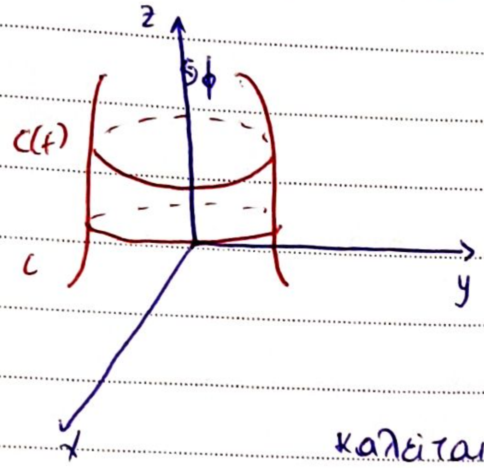
Πρόταση
Έστω $X: U \to \mathbb{R}^3$ κανονική παραμετρική επιφάνεια. Τότε για κάθε $q_0 \in U$ υπάρχει περιοχή του $U_0 \subseteq U$ τέτοια ώστε $X(U_0)$ είναι κανονική επιφάνεια

Απόδειξη

Επειδή η X είναι κανονική υποθέτω ότι $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q_0) \neq 0$

Θεωρώ την λεία απεικόνιση $\phi: U \to \mathbb{R}^2$ $\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$
Από Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης υπάρχει περιοχή $U_0 \subseteq U$ του q_0
ώστε $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ Τα σημεία στο $X(U_0)$ είναι
$(x, y, z(u(x,y), v(x,y))) = (x, y, f(x,y))$

Εκ περιστροφής επιφάνειας



Θεωρώ καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^3$, $c(t)=(f(t), 0, g(t))$, $t\in I$
$c(I) \subseteq O_{xz}$

Η παραμετρική επιφάνεια $X : I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$X(t,\phi) = (f(t)\cos\phi, f(t)\sin y, g(t)) \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

καλείται εκ περιστροφής επιφάνεια.

$$X_t(t,\phi) = (f'(t)\cos\phi, f'(t)\sin\phi, g'(t))$$

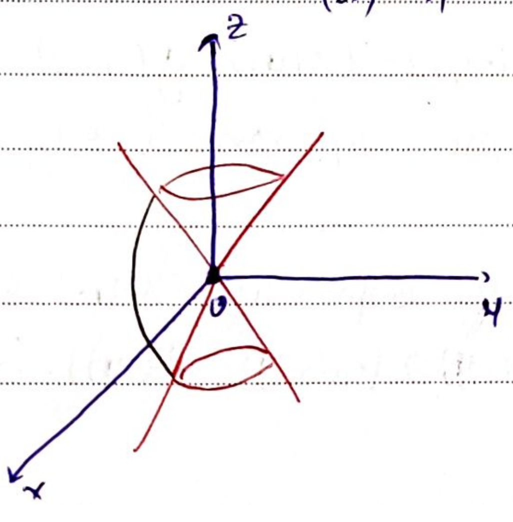
$$X_\phi(t,\phi) = (-f(t)\sin\phi, f(t)\cos\phi, 0)$$

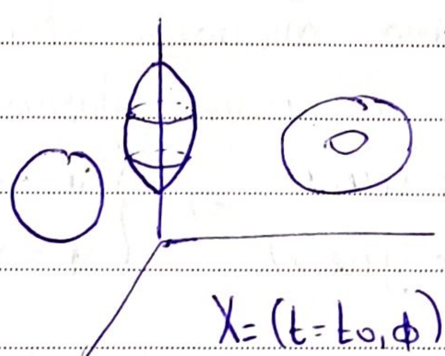
$$X_t\times X_\phi(t,\phi) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f'(t)\cos\phi & f'(t)\sin\phi & g'(t) \\ -f(t)\sin\phi & f(t)\cos\phi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-f(t)g'(t)\cos\phi, -f(t)g'(t)\sin\phi, f(t)f'(t))$$

$$= -f(t)(g'(t)\cos\phi, g'(t)\sin\phi, f'(t))$$

Συμπέρασμα: Η X καλείται κανονική
$\Leftrightarrow$ (i) η εικόνα της c δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής
και
(ii) η c είναι κανονική καμπύλη.





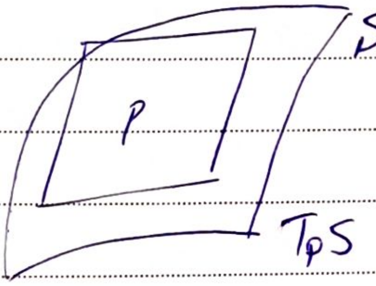
$X=(t=t_0,\phi)$ καλείται παράλληλος, $X(t,\phi=\phi_0)$ μεσημβρινός

Ορισμός: Δύο παραμετρικές συναρτήσεις $x, \tilde{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ καλείται <u>γεωμετρικά ισότιμες</u> αν-ν υπάρχει $T \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ τέτοια ώστε $\tilde{x} = T \circ x$

$$\tilde{x}_u = (T\circ x)_u = A x_v \qquad\qquad T = T_v \circ A$$
$$\tilde{x}_u = (T\circ x)_u = A x_v$$
$$\tilde{x}_u \times \tilde{x}_v = A x_v \times A x_v = \pm 1 A (x_u \times x_v)$$

$\mathbb{R}^3$ Συνήθες Εσωτερικό Γινόμενο του $\mathbb{R}^3$

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\langle (x,y) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \qquad x = (x_1, x_2, x_3)$$
$$y = (y_1, y_2, y_3)$$



$$T_p S \subseteq T_p \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^3$$

Ορίζω $\langle , \rangle_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$

$$(w_1, w_2) \mapsto \langle w_1, w_2 \rangle_p \qquad w_1, w_2 \in T_p S$$

$$\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle_p}, \quad w \in T_p S$$

$$\|w_1 + w_2\|^2 = \|w_1\|^2 + 2\langle w_1, w_2\rangle_p + \|w_2\|^2$$
$$\Leftrightarrow \langle w_1, w_2 \rangle_p = \frac{1}{2}\left(\|w_1 + w_2\|^2 - \|w_1\|^2 - \|w_2\|^2\right)$$

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \frac{1}{2}\left(\langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle_p - \langle w_1, w_1 \rangle_p - \langle w_2, w_2 \rangle_p\right)$$

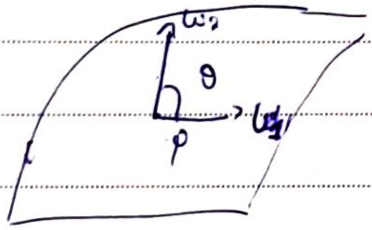
Πρώτη Θεμελιώδη Μορφή

Ορισμός: Έστω S κανονική επιφάνεια. Καλούμε πρώτη θεμελιώδη μορφή της S στο σημείο της p, την τετραγωνική μορφή $I_p: T_pS \to \mathbb{R}$
$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2$ $\quad w \in T_pS$.

Μήκος Διανύσματος: $\|w\| = \sqrt{I_p(w)}$ $\qquad I_p(w) \geq 0 \;\; \forall w \in T_pS$

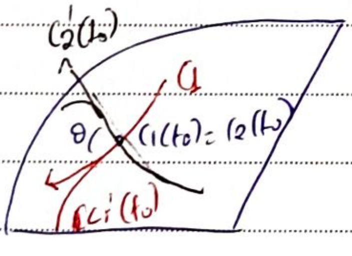
$I_p(w) = 0 \Leftrightarrow w = 0$

Γωνία Διανύσματος $\qquad w_1, w_2 \in T_pS - \{0\}$



$$\cos\theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\|\|w_2\|} = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle_p}{\sqrt{I_p(w_1)}\sqrt{I_p(w_2)}}$$

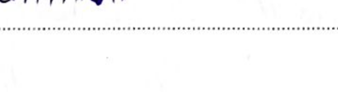
Γωνία Τεμνόμενων Επιφανειακών καμπυλών

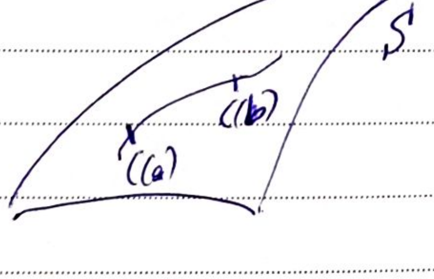


$\theta \in [0, \pi]$

$$\cos\theta = \frac{\langle x_u, x_v \rangle}{\|x_u\|\|x_v\|} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

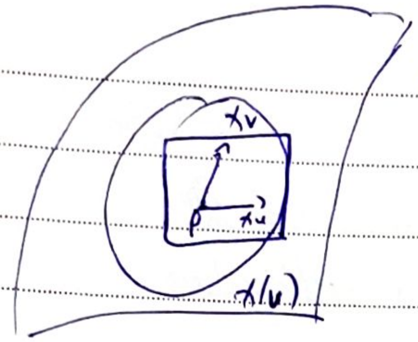
Μήκος Καμπύλης $\qquad c: I \subset \mathbb{R} \to S$





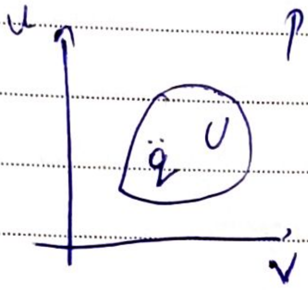
Μήκος της καμπύλης c από το a στο b είναι το

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t))}\, dt$$



$x: V \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ σύστημα συντεταγμένων

$\{x_u(q), x_v(q)\}$ (βάση του εφ. επιπέδου T_pS)



$p = x(q)$ Ο πίνακας της I_p είναι

$$\begin{pmatrix} \langle x_u, x_u \rangle & \langle x_u, x_v \rangle \\ \langle x_u, x_u \rangle & \langle x_v, x_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Ορισμός: Για κάθε σύστημα συντεταγμένων $x: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ οι συναρτήσεις $E, F, G, U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$E(u,v) = \|x_u(u,v)\|^2$, $F(u,v) = \langle x_u(u,v), x_v(u,v) \rangle$, $G(u,v) = \|x_v(u,v)\|$
καλούνται θεμελιώδη ποσά $1^{ης}$ τάξης.

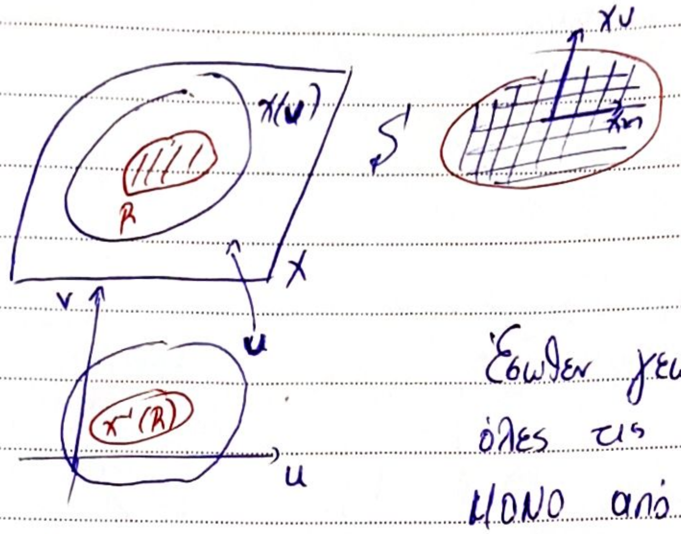
$w \in T_pS$, $w = a x_u + b x_v \Rightarrow I_p(w) = Ea^2 + 2Fab + ab^2$

$$I_p(w) = \|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \langle a x_u + b x_v, a x_u + b x_v \rangle$$
$$= a^2 \langle x_u, x_u \rangle + 2ab \langle x_u, x_v \rangle + b \langle x_u, x_v \rangle$$

- $E, G > 0$ $\quad EG - F^2 > 0$ $\quad \|x_u \times x_v\|^2 = \|x_u\|^2 \|x_v\|^2 - \langle x_u, x_v \rangle^2$

$$\|x_u \times x_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

Εμβαδό



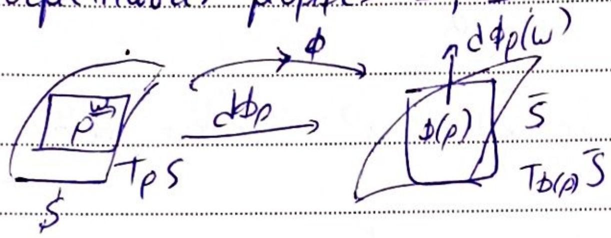
Ορισμός: Το εμβαδό του R είναι $\iint_{x^{-1}(R)} \|x_u \times x_v\| \, du\, dv$

Έσωθεν γεωμετρία κανονικής επιφάνειας εννοώ όλες τις ιδιότητες, ποσότητες που εξαρτώνται ΜΟΝΟ από την πρώτη θεμελιώδη μορφή.

Πότε δυο επιφάνειες έχουν την ίδια έσωθεν γεωμετρία;

Ισομετρίες Μεταξύ Κανονικών Επιφανειών

Ορισμός: Θεωρώ κανονικές επιφάνειες S, $\tilde{S}$ με αντίστοιχες πρώτες θεμελιώδεις μορφές I, $\tilde{I}$



(i) Μια απεικόνιση $\phi: S \to \tilde{S}$ καλείται ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ αν-ν

a) ϕ είναι διαφορίσιμη και

b) $\tilde{I}_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) = I_p(w)$ $\forall p \in S$ $\forall w \in T_pS$.

ii) Η S καλείται ισομετρική της $\tilde{S}$ αν-ν υπάρχει ισομετρία $\phi: S \to \tilde{S}$

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \frac{1}{2}\{I_p(w_1+w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2)\}$$

b) $\Leftrightarrow \langle d\phi_p(w_1), d\phi_p(w_2)\rangle_{\phi(p)} = \langle w_1, w_2 \rangle_p \quad \forall p \in S, \forall w_1, w_2 \in T_pS.$